

文章编号: 1000-6788(2000) 12-0097-05

不确定性网络直接优化规划模型建立(I)

李文华, 谭燕秋

(河北建筑科技学院建工系, 河北 邯郸 056038)

摘要: 分析了不确定性网络直接优化的现状、优化的困难、目前存在的问题; 给出了不确定网络直接优化的原则以及一般方法, 同时建立了 PERT 网络工期压缩、最优工期的线性规划模型、灰色线性规划模型, 改进了传统的资源优化法。

关键词: 不确定性网络; 直接优化; 灰色线性规划

中图分类号: TU 722

The Foundation of Direct Optimizing Programming Model in Uncertain Network (I)

LI Wen-hua, TAN Yan-qiu

(Department of Construction Engineering, Hebei Institute of Architectural Science & Technology, Hebei Handan 056038)

Abstract After analyzing the actuality of uncertain network's direct optimizing, difficulty of optimizing and the existing question at present, the principle and common method of uncertain network's direct optimizing was put forward, at the same time PERT network time limit for a project compression, linear programming model of the optimal time limit for a project and gray linear programming model was established, the traditional resource optimizing method was improved.

Keywords uncertain network; optimizing; gray linear programming

1 不确定网络优化的困难及存在的问题

不确定网络(PERT 网络)的最大特点是工作的持续时间是未知的。由于工作持续时间的不确定性必然导致总时差、自由时差等时间参数的不确定性,这就为利用总时差和自由时差对网络优化带来许多困难。首先如果压缩关键线路上的关键工作的持续时间,就有可能超过部分非关键线路总时差,而导致非关键线路的工作时间被压缩。这在网络压缩过程中是不允许的。其次在资源优化网络时,利用非关键线路的自由时差对网络调整时,也有可能推迟工作开始时间超过工作的自由时差而影响后序工作。此外工作的自由时差的利用也必须考虑工作自由时差的实现。因此,将不确定网络通过计算加权平均时间转化为肯定网络后再加以优化的传统方法是不适当。其主要存在的问题是没有考虑网络工作时间的不确定性而带来的自由时差、总时差的不确定性对网络工期压缩、资源优化带来的问题,同时也没考虑自由时差、总时差利用的可能性,因而对不确定网络的优化就必须考虑工作时间的不确定性以及时差利用的可能性。

2 不确定网络工期压缩优化方法

当计算的不确定网络工期大于计划工期时,就需要对网络的关键工作时间进行压缩,工作时间的压缩又必然导致直接费用的增加。因此,不确定网络工期压缩优化的目标就是使整个计划压缩时直接费用最

小. 其约束条件是在关键工作时间压缩时, 其每次压缩时间量不得超过非关键线路上的总时差. 最早研究不确定网络优化的人为美国的 Osman Coskunoglu, 其研究的内容是在 CPM 网络线性规划模型的基础上引入概率约束条件, 从而考虑 PERT 网络工作时间的不确定性问题. 国内尚无报导有关对 PERT 网络考虑时间不确定性优化问题.

2.1 PERT 网络工期压缩的线性规划模型的建立

图上直接优化方法的优点是概念清楚, 方法直接易懂, 对于小规模网络适用性较好, 缺点是重复次数较多, 不适合大规模网络. 随着计算机技术的不断普及及网络技术模型法优化越来越显示出巨大的优越性, 大大减少了重复工作量, 可一次自动完成.

1) 基本假定及规定

假定工作的持续时间属正态分布, 平均时间为 t_e , 方差为 σ

$$t_e = \frac{t_0 + 4t_m + t_p}{6} \quad (1)$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{t_p - t_0}{6} \right)^2 \quad (2)$$

式中: t_e 为平均工作时间; t_0 为工作最乐观时间; t_p 为工作最悲观时间; t_m 为工作最有可能完成时间;

假定工作每压缩单位时间直接费用为 C 元/单位时间;

考虑到压缩的可能性, 规定优先压缩方差较小的关键工作的时间;

每次压缩关键工作时间时, 其压缩量不得超过所有非关键线路上的总时差;

考虑到工作持续时间的不确定性, 在压缩关键线路上关键工作时间时“有可能”超过所有的非关键线路上的总时差, 我们规定一个不超过的保证概率, 即规定一个压缩水平 α .

2) 线性规划模型的建立

目标函数的确定

设工作 $i-j$ 的压缩时间为 X_{i-j} , 单位时间直接压缩费用为 C_{i-j} ; 方差为 σ_{i-j} , 则根据 PERT 网络压缩的优化目标, 目标函数为:

$$\min (C) = \sum_{i < j, i-j \leq n} \sigma_{i-j} \cdot C_{i-j} \cdot X_{i-j} \quad (3)$$

式中: C 为总的压缩直接费用; σ_{i-j} 为 $i-j$ 工作的方差; X_{i-j} 为 $i-j$ 工作的压缩时间; C_{i-j} 为 $i-j$ 工作的压缩时间; n 为网络最大的事件编号数.

约束条件确定 设 $i-j$ 工作可压缩的时间范围为 $[a_{i-j}^x, b_{i-j}^x]$, 且 $a_{i-j}^x < b_{i-j}^x$. 为了不使每次工作时间的压缩量超过所有非关键线路的总时差以及压缩水平不超过规定的水平, 同时又不超过规定的压缩范围. 本文采用“闭合圈原理”来实现, 从而建立约束条件方程. 所谓“闭合圈原理”是指从所有关键线路出发的结点事件经有限个非关键线路上的结点事件回到关键线路上不同的结点事件构成一个“闭合圈”, 在“闭合圈”上的关键工作持续的时间总和应大于等于“闭合圈”上的非关键工作持续时间的总和时, 就可保证关键工作的时间压缩不超过非关键工作的总时差. 根据“闭合圈”原理, 对于所有网络的“闭合圈”可得到一组约束条件:

$$\sum_{i, j, i-j \in C_p} (t_{ei-j} - X_{i-j}) - \sum_{g < k, g-k \in NCP} (t_{eg-k} - X_{g-k}) \geq 0 \quad (4)$$

经整理可得:

$$\sum_{i < j, i-j \in C_p} X_{i-j} - \sum_{g < k, g-k \in NCP} X_{g-k} \leq \sum_{i < j, i-j \in C_p} t_{ei-j} - \sum_{g < k, g-k \in NCP} t_{eg-k} \quad (5)$$

式中: X_{i-j} 为关键线路上 $i-j$ 工作的压缩时间; X_{g-k} 为非关键线路上 $g-k$ 工作的压缩时间; t_{ei-j} 为关键线路上 $i-j$ 工作的平均持续时间, t_{eg-k} 为非关键线路上 $g-k$ 工作的平均持续时间.

为了满足关键工作的时间压缩水平不超过规定的压缩水平 α , 即有一定的保证概率不超过非关键工作的总时差, 还应满足以下约束条件:

$$P\left(\sum_{\substack{i < j \\ i-j \text{ CP}}} X_{i-j} - \sum_{\substack{g < k \\ g-k \text{ NCP}}} X_{g-k} \leq \sum_{i < j} t_{ri-j} \sum_{\substack{g < k \\ g-k \text{ NCP}}} t_{eg-k}\right) \geq 1 - \alpha \quad (6)$$

式中: $P\left(\sum_{\substack{i < j \\ i-j \text{ CP}}} X_{i-j} - \sum_{\substack{g < k \\ g-k \text{ NCP}}} X_{g-k} \leq \sum_{i < j} t_{ri-j} \sum_{\substack{g < k \\ g-k \text{ NCP}}} t_{eg-k}\right)$ 为不超过非关键工作总时差的保证概率; α 为关键工作时间压缩水平。

(6) 式显然为概率型的约束条件, 为了将概率型的约束条件转化成线性约束条件, 根据假定 (1) 每个“闭合圈”上的工作时间之和的分布仍属正态分布。根据规定的压缩水平或保证概率以及正态分布表可以确定一个常数 λ_{α} (λ_{α} 为第 i 个“闭合圈”的常数)。从而概率型的约束条件就可以转化为线性约束条件:

$$\sum_{\substack{i < j \\ i-j \text{ CP}}} X_{i-j} - \sum_{\substack{g < k \\ g-k \text{ NCP}}} X_{g-k} \leq \sum_{i < j} t_{ei-j} \sum_{\substack{g < k \\ g-k \text{ NCP}}} t_{eg-k} + \sigma_i \lambda_{\alpha} \quad (7)$$

式中: λ_{α} 为 α 水平上的第 i 个“闭合圈”上的常数; σ_i 为“闭合圈” i 上的所有工作的方差和的均方根, σ_i 按下式计算:

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{\substack{i < j \\ i-j \text{ CP}}} \sigma_{ri-j}^2 + \sum_{\substack{g < k \\ g-k \text{ NCP}}} \sigma_{eg-k}^2} \quad (8)$$

其它符号含义同前。

为了满足每个工作的压缩时间不超过规定的时间范围, 也可以得到一组约束条件:

对于所有工作 $i-j$:

$$X_{i-j} \leq a_{i-j}^x \quad (9)$$

$$X_{i-j} \geq b_{i-j}^s \quad (10)$$

式中: a_{i-j}^x , b_{i-j}^s 均为给定常数。

综上所述: PERT 网络工期压缩的线性规划一般模型为:

目标函数:

$$\min C = \sum_{\substack{i < j \\ i-j \leq n}} \sigma_{ri-j} \cdot C_{ri-j} \cdot X_{i-j} \quad (11)$$

约束条件:

$$\sum_{\substack{i < j \\ i-j \text{ CP}}} X_{i-j} - \sum_{\substack{g < k \\ g-k \text{ NCP}}} X_{g-k} \leq \sum_{i < j} t_{ei-j} \sum_{\substack{g < k \\ g-k \text{ NCP}}} t_{eg-k} \quad (12)$$

$$\sum_{\substack{i < j \\ i-j \text{ CP}}} X_{i-j} - \sum_{\substack{g < k \\ g-k \text{ NCP}}} X_{g-k} \leq \sum_{i < j} t_{ei-j} \sum_{\substack{g < k \\ g-k \text{ NCP}}} t_{eg-k} + \sigma_i \lambda_{\alpha} \quad (13)$$

$$X_{i-j} \leq a_{i-j}^x \text{ (对所有工作)} \quad (14)$$

$$X_{i-j} \geq b_{i-j}^s \text{ (对所有工作)} \quad (15)$$

$$X_{i-j}, X_{g-k} \geq 0 \quad (16)$$

式中, 所有符号同前所述。

2.2 PERT 网络工期压缩的灰色线性规划模型

在上述 PERT 网络工期压缩线性规划模型中仍然存在一定的问题。其主要问题是: 尽管我们引入了一个压缩水平或保证概率, 但仍然有可能压缩时间超过非关键线路上非关键工作的总时差; 另外压缩水平的选取也存在许多问题, 最关键的问题是 α 或保证概率的选取对优化的结果影响较大, 不同的 α 值, 优化的结果相差很大, 因而很难做出决策。采用灰色线性规划模型可以消除压缩水平参数或保证概率的影响, 同样也能达到目的。

1) 基本假定和规定

方法 (一) 中的基本假定和规定仍然有效;

假定每个工作持续时间不是一个固定的常数, 而是一个区间灰数, 且工作 $i-j$ 的持续时间 $t_{i-j} =$

$[t_e, t_p]_{i-j}$, t_e 为最乐观时间, t_p 为悲观时间, $t_e < t_p$; 虚工作 $t_{i-j} = [0, 0]_{i-j}$;

由于工作持续时间是一个区间灰数, 则总时差也是一个区间灰数, 工作 $i-j$ 的总时差 $TF_{i-j} = [TF_0, TF_p]_{i-j}, TF_0 > TF_p$;

关键线路上的关键工作的时间压缩量不得超过总时差区间灰数。

2) 目标函数同方法(一), 其形式为:

$$\text{目标函数: } \min C = \sum_{\substack{i < j \\ i-j \leq n}} \sigma_{i-j} \cdot C_{i-j} \cdot X_{i-j} \quad (17)$$

3) 约束条件确定

为了满足基本假定和规定, 仍然采用“闭合圈原理”, 则约束条件为:

$$\sum_{i-j \in NP} X_{i-j} - \sum_{g-k \in NCP} X_{g-k} \leq \sum_{i-j \in NP} [t_0, t_p]_{i-j} - \sum_{g-k \in NCP} [t_0, t_p]_{g-k} \quad (18)$$

$$\sum_{i-j \in NP} [t_0, t_p]_{i-j} - \sum_{g-k \in NCP} [t_0, t_p]_{g-k} = \left[\sum (t_{ei-j} - t_{pg-k}), \sum (t_{pi-j} - t_{pg-k}) \right] \quad (19)$$

其结果仍是一个区间灰数; 其它符号同前所述。

为了对压缩时间限制在可压缩范围之间, 仍有以下约束条件存在, 对于所有工作, 其约束条件为:

$$X_{i-j} \leq a_{i-j}^x \text{ (对所有工作)} \quad (20)$$

$$X_{i-j} \geq b_{i-j}^x \text{ (对所有工作)} \quad (21)$$

3 PERT 网络最优工期优化方法

PERT 网络最优工期优化方法与 PERT 工期压缩优化方法基本相同, 所建立的优化模型也基本相似, 仅仅在 PERT 工期压缩优化方法的基础上引入间接费用, 使得压缩后总的费用最小。

$$\text{目标函数为: } \min C = \left(\sum_{\substack{i < j \\ i-k \leq n}} \sigma_{i-j} \cdot C_{i-j} \cdot X_{i-j} \right) - (X_n - X_1)q \quad (22)$$

约束条件: 同二(一)2(2), 二(二)3

式中, q 为单位时间间接费; X_i 为第 i 个事件的最早时间; 其他符号同前

4 PERT 网络资源优化方法

PERT 网络资源优化的方法主要是利用非关键工作的时差来调整非关键工作的开始时间, 从而使得所需资源全部小于可供资源限额或使每个时段内所需资源平衡, PERT 网络资源优化的难点主要是自由时差的可使用的可能性, 即非关键工作推迟多少而不影响后序工作, 其次是自由时差的实现性, 即在资源优化时选择那些工作进行调整。针对上述问题, 我们采取以下方法加以解决:

1) 本文规定一个使用自由时差而不影响后序工作开始的保证概率 P , 在此保证概率下可认为不影响后序工作。假定工作持续时间属正态分布, 则允许使用的最大自由时差为:

$$TF_{i-j} = FF_{ei-j} + \lambda \sigma_{i-j} \quad (23)$$

式中: TF_{i-j} 为允许使用的最大自由时差; FF_{ei-j} 为平均的自由时差; λ 为与保证概率 P 有关的参数; σ_{i-j} 为 $i-j$ 工作的根方差。

2) 考虑到自由时差的实现, 在选择调整非关键工作时, 可优先选用方差较小的非关键工作进行调整。资源优化的其它同肯定型一般网络。

5 实例

某 PERT 网络, 有关参数见表 1, 建立灰色优化模型。

表 1 PERT 网络参数表

工作名称	t_0	t_m	t_p	t_e	σ	a^x	b^s	C 元/天
1- 2	6	8	10	8	0.667	2	3	20
1- 3	7	9	14	9.5	1.167	1	2	10
2- 3	8	10	14	10	1.000	2	3	7
2- 4	9	11	13	11	0.667	3	4	5
2- 5	15	17	19	17	0.667	5	7	25
3- 5	14	16	18	16	0.667	4	6	30
4- 5	0	0	0	0	0	0	0	
4- 6	7	9	12	4.5	0.833	1	2	4
5- 6	6	9	12	9	1.000	2	3	8

PERT 网络工期压缩优化灰色线性规划模型为:

目标函数: $\min = 13.3X_{12} + 11.6X_{13} + 7X_{23} + 3.3X_{24} + 16.7X_{25} + 20.0X_{35} + 3.3X_{46} + 8.0X_{56}$

约束条件: $X_{12} + X_{23} + X_{35} + X_{56} = 10$

$X_{12} + X_{23} - X_{13} = 8.5$

$X_{23} + X_{35} - X_{23} = 9.0$

$X_{23} + X_{35} - X_{24} = 15.0$

$X_{23} + X_{35} + X_{56} - X_{24} - X_{56} = 19.5$

$X_{12} + X_{23} - X_{13} \in [7, 10]$

$X_{23} + X_{35} - X_{23} \in [7, 13]$

$X_{23} + X_{35} - X_{24} \in [13, 19]$

$X_{23} + X_{35} + X_{56} - X_{24} - X_{56} \in [12, 19]$

(压缩范围略)

$X_{ij} \geq 0$

6 结论

对于 PERT 网络, 由于工作持续时间的不确实性, 为网络优化带来许多困难. 将 PERT 网络转化成确定型网络加以优化的传统方法存在一定的问题. 其主要问题是关键工作时间的压缩有可能超过非关键工作总时差; 资源优化中, 非关键工作的推迟也可能超过自由时差而影响后续工作. 本文在建立的 PERT 网络优化线性规划模型中引入概率约束来解决上述问题; 建立 PERT 网络灰色线性规划模型可从根本上解决问题; 在资源优化过程中引入自由时差可使用概念, 对自由时差加以限制, 并优化调整方差较小的非关键工作. 最后本文给出了灰色 PERT 网络优化模型(模型求解方法另文).

参考文献:

[1] Osman Coskunoglu Optimal Probabilistic Compression of PERT Networks [J] Journal of Construction Engineering and Management, 1984, 110(4): 437~ 446
[2] J D 蕙斯特, F K 莱维 统筹法管理指南[M] 北京: 机械工业出版社, 1983
[3] 章志敏 广义熵在统筹时间分布律中的应用[J] 数学的实践与认识, 1982, (1): 31~ 33